PROBLEMA 1: RESISTOR CILÍNDRICO CON DOS MATERIALES

Se tiene un resistor cilíndrico de longitud *L*, constituido por dos cilindros, de radios *a* y *b* (*a*<*b*), de material conductor ideal, un conductor homogéneo de conductividad σ_1 en la región $a < \rho < b$, $0 < \varphi < \pi$, $0 < z < L$, y un conductor homogéneo de conductividad σ_2 en la región $a < \rho < b$, $\pi < \varphi < 2\pi$, $0 < z < L$. Determina el potencial electrostático en el interior del resistor, y la resistencia del dispositivo.

Solución.

En primer lugar, se estudia la geometría del sistema para saber de cuántas coordenadas depende el potencial electrostático. Al conectar una batería entre los conductores ideales, cada uno de éstos se torna equipotencial, con un potencial igual al del borne de la batería al que está conectado. Esto quiere decir que el potencial en los cilindros conductores ideales no depende de z ni de φ.

En el interior del resistor, aunque esté constituido por dos materiales distintos, dentro de cada material el potencial no depende de z ni de φ, por lo que depende sólo de la coordenada radial. Al depender de una sola coordenada, la solución para el potencial es la trivial. Se requieren dos condiciones de frontera para cada región (región 1: $a < \rho < b$, $0 < \varphi < \pi$, $0 < z < L$, región 2: $a < \rho < b$, $\pi < \varphi < 2\pi$, $0 < z < L$).

Las condiciones de frontera del problema son:

a) $\phi_1(a) = 0$ b) $\phi_1(b) = V_0$

c) $\phi_2(a) = 0$ d) $\phi_2(b) = V_0$

Puede observarse que se fijó de manera arbitraria los voltajes de las láminas conductoras.

Dadas las condiciones de frontera, es evidente que los potenciales electrostáticos de las dos regiones deben ser idénticos. La forma de éstos es $\phi_1(\rho) = \phi_2(\rho) = A + B\ln\rho$. Con las condiciones de frontera dadas, se obtiene finalmente (luego de aplicar propiedades de los logaritmos):

$$\phi_1(\rho) = \phi_2(\rho) = V_0 \frac{\ln(\rho/a)}{\ln(b/a)}$$

Para el campo eléctrico, se tiene:

$$\overline{E_1}(\rho) = \overline{E_2}(\rho) = -\overline{1\rho}\,\frac{V_0}{\rho\ln(b/a)}$$

La corriente total en el resistor es:

$$I = \int_0^L \int_0^\pi \sigma_1 \overline{E_1}(\rho) \cdot (-\overline{1\rho})\,\rho\, d\varphi\, dz + \int_0^L \int_\pi^{2\pi} \sigma_2 \overline{E_2}(\rho) \cdot (-\overline{1\rho})\,\rho\, d\varphi\, dz$$
$$= \frac{V_0(\sigma_1 + \sigma_2) L\pi}{\ln(b/a)}$$

Finalmente, la resistencia del dispositivo es $R=V_0/I$:

$$R = \frac{\ln(b/a)}{(\sigma_1 + \sigma_2)L\pi} = \frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{\ln(b/a)}{\sigma_1 L\pi}} + \dfrac{1}{\dfrac{\ln(b/a)}{\sigma_2 L\pi}}}$$

En este resultado se observa que la resistencia del dispositivo es equivalente a la combinación en paralelo de dos resistencias de conductividades distintas, como era de esperar, dada la geometría del resistor.